Энгельсский технологический институт (филиал) федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»

Кафедра «Естественные и математические науки»

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.

Методические указания к практическим занятиям
и выполнению контрольной работы по дисциплине
**«ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»**
для студентов направлений

15.03.02 «Технологические машины и оборудование»
15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств»
18.03.01 «Химическая технология»
21.03.01 «Нефтегазовое дело»

очной и заочной формы обучения

**Энгельс 2025**

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 2
Глоссарий 3
Основные теоретические результаты 6
Литература 13

## ВВЕДЕНИЕ

Аналитическая механика представляет собой раздел теоретической механики, в котором изучаются как движения, так и равновесия произвольных механических систем. При этом методы решения задач являются общими. Так, уравнения движения приобретают единую структуру, которая не зависит от вида системы.

В методических указаниях приведены определения основных понятий аналитической механики. Эти определения представлены в глоссарии в том порядке, который необходим для освоения материала, и проиллюстрированы примерами. Указания также содержат краткое изложение теоретических результатов, на которых основана аналитическая механика.

# ГЛОССАРИЙ

**1. *Связи*** – ограничения, которые накладываются на координаты и скорости материальных точек механической системы. Математическое описание связей (*уравнения связей*) может содержать равенства (*двусторонние* или *удерживающие связи*) и неравенства (*односторонние связи*). Вид уравнений позволяет классифицировать связи.

*Голономные связи* можно описать уравнениями, не содержащими производные от координат точек.

*Неголономные связи* описываются уравнениями, из которых нельзя за счет интегрирования исключить производные по времени от координат.

*Стационарные* (*склерономные*) связи описываются уравнениями, не содержащими явно время. Если время входит явно в описание связи, то такая связь называется *подвижной* (*реономной*).

**Пример 1.** Пусть материальная точка $M$ движется в плоскости, находясь в каждый момент времени на заданном расстоянии $r=a(t)$ относительно некоторой неподвижной точки $O$. Введем прямоугольную систему координат $Oxy$. Тогда на координаты точки $M$ будет налагаться ограничение

$$x^2 + y^2 = a^2(t). \qquad (1)$$

Уравнение (1) задает голономную и реономную связь.

**2. Обобщенные координаты** – независимые величины, значения которых однозначно определяют состояние механической системы. Необходимое для описания системы число обобщенных координат называют *числом степеней свободы* механической системы.

**Пример 2.** Рассмотрим движение материальной точки из примера 1. Наличие единственной связи (1) уменьшает число степеней свободы на единицу – от двух (при свободном движении) до одной. Положение точки в любой момент времени можно теперь задать, используя только одну обобщенную координату. Обобщенной координатой не обязательно должна быть какая-то из исходных декартовых координат. Например, выбрав начальное направление, от которого отсчитывается угол $q$ до радиус-вектора точки, мы можем выразить прямоугольные координаты

$$x = a(t)\cos q, \quad y = a(t)\sin q.$$

При заданной длине радиус-вектора $r=a(t)$ мы, зная единственную обобщенную координату $q(t)$, мы можем определить положение точки.

**3. Возможные (виртуальные) перемещения**

*Возможное перемещение материальной точки* – бесконечно малое мысленное перемещение, которое допускается в рассматриваемый момент времени наложенными на точку связями. Возможное перемещение $\delta\boldsymbol{r}$ можно описать как изохронную *вариацию* радиус-вектора, то есть как полный

дифференциал при фиксированном времени $t$. В декартовой системе координат

$$\delta \boldsymbol{r} = (\delta x)\boldsymbol{i} + (\delta y)\boldsymbol{j} + (\delta z)\boldsymbol{k}, \tag{1}$$

где $\delta x, \delta y, \delta z$ есть изохронные вариации координат точки. Напомним, что действительное перемещение $d\boldsymbol{r} = (dx)\boldsymbol{i} + (dy)\boldsymbol{j} + (dz)\boldsymbol{k}$ является полным дифференциалом радиус-вектора при изменении времени, как независимой переменной, на величину $dt$. В силу этого имеет место равенство

$$d\boldsymbol{r} = \left(\dot{x}(t)\boldsymbol{i} + \dot{y}(t)\boldsymbol{j} + \dot{z}(t)\boldsymbol{k}\right)dt .$$

*Возможное перемещение механической системы* – любая совокупность возможных перемещений точек системы. При наличии связей не все возможные перемещения точек являются независимыми. В аналитической механике установлено, что число независимых возможных перемещений равно числу степеней свободы системы.

**Пример 3.** Определить отношение между возможными перемещениями $\delta S_A$ точки $A$ кривошипа $OA$ и $\delta S_C$ ползуна, если длины $OB$=$AB$. [2]

Для кривошипа $OA$ на рис.1 получаем, что $\delta S_B$=0,5·$\delta S_A$ и перемещение $\delta S_B$ направлено по горизонтали вправо. Для стержня $BC$ устанавливаем, что $\delta S_B$=$\delta S_C$. Окончательно, $\delta S_A : \delta S_C$=2.

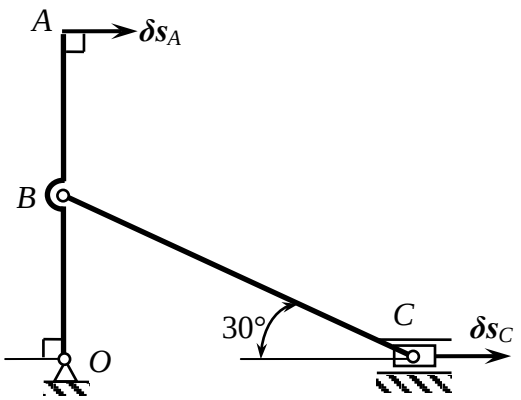


Рис.1

## 4. Виртуальная работа силы

*Элементарная работа силы* $\boldsymbol{F}$ *на возможном перемещении* $\delta\boldsymbol{r}$ *ее точки приложения* равна (по определению)

$$\delta A = \boldsymbol{F}\delta\boldsymbol{r} = F_x \cdot \delta x + F_y \cdot \delta y + F_z \cdot \delta z . \tag{2}$$

Аналогично определяется *элементарная работа сил* $\boldsymbol{F}_k$ *на возможном перемещении* $\delta\boldsymbol{r}_k$ *механической системы N точек*

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k \delta\boldsymbol{r}_k . \tag{3}$$

Для системы, на которую наложены связи, полезно различать в выражении (3) активные силы (условимся сохранить для них обозначение $\boldsymbol{F}_k$) и реакции связей (далее будут обозначаться $\boldsymbol{R}_k$). Тогда

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} (\boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{R}_k)\delta\boldsymbol{r}_k = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k \delta\boldsymbol{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{R}_k \delta\boldsymbol{r}_k .$$

Связи, наложенные на систему, называются *идеальными*, если

$$\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{R}_k \delta\boldsymbol{r}_k = 0 \tag{4}$$

для любого возможного перемещения системы. Перечислим некоторые распространенные ситуации, которые могут быть смоделированы с использованием понятия идеальных связей:
1) связи между точками абсолютно твердого тела;
2) связи при движении точки по абсолютно гладкой линии или абсолютно гладкой поверхности;
3) гибкие нерастяжимые связи между точками системы (нити, тросы, канаты и тому подобное);
4) неподвижное закрепление точки системы.

**5. Обобщенные силы**

Рассмотрим механическую систему $N$ точек, на которую наложено $l$ голономных связей. Как уже обсуждалось в пункте 2 глоссария, система в этом случае имеет $n$=3$N$-$l$ степеней свободы. Для описания состояния системы достаточно использовать соответствующее число обобщенных координат $q_1,\ldots,q_n$ . Таким образом, для точек системы

$$\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_k(q_1,...,q_n,t), \quad k = 1,...N \tag{5}$$

Для системы со стационарными связями время не входит явно в правые части выражений (5). Тогда для возможных перемещений точек системы справедливы равенства

$$\delta\boldsymbol{r}_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i, \quad k = 1,...,N\,. \tag{6}$$

Используем далее представления (6) в выражении (3) для элементарной работы. Получаем

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i \right) = \sum_{k=1}^{N} \left( \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} \right)\delta q_i\,.$$

Таким образом

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i\,. \tag{6}$$

В формулу (6) для элементарной работы входят *обобщенные силы*

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}, \quad i = 1,...,n\,. \tag{7}$$

Следует заметить, что выражения (7) определяют обобщенные силы как скалярные величины. Физическая размерность этих величин может быть разной. При этом произведения $\delta A_i = Q_i \delta q_i$ должны иметь размерность механической работы, то есть $[Q_i \delta q_i]$=[Дж].

## ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Используем понятия, определенные в глоссарии, для обсуждения теоретических результатов, которые легли в основу аналитической механики. В рамках данных методических указаний некоторые из этих результатов приводятся без доказательства. Полное изложение материала можно найти в классических учебниках [1,3].

### 1. Принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа)

Для того чтобы система материальных точек, на которую наложены идеальные стационарные удерживающие связи, находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы работа всех активных сил на любом возможном перемещении системы, а также скорости всех точек в рассматриваемый момент времени, равнялись нулю:

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k \delta \boldsymbol{r}_k = 0, \\ \boldsymbol{v}_k(t_0) = 0 \quad k = 1,...,n\end{gathered} \tag{8}$$

В дополнение к данной формулировке сделаем замечания, которые расширяют возможности применения принципа Лагранжа.

1) При наличии неидеальных связей реакции этих связей (например, силы трения) относят к активным силам.

2) Если требуется определить реакцию идеальной связи, то эту связь в расчетной схеме отбрасывают, а соответствующую реакцию рассматривают как активную силу.

3) Вместо возможных перемещений $\delta \boldsymbol{r}_k$ можно рассматривать пропорциональные им возможные скорости.

Принцип Лагранжа можно сформулировать в терминах обобщенных координат и обобщенных сил. Действительно, условие (8) означает что

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k \delta \boldsymbol{r}_k = 0 .$$

Тогда в силу (6)

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = 0 . \tag{9}$$

Равенство (9) в силу независимости вариаций $\delta q_i$ равносильно системе условий

$$Q_i = 0, \quad i = 1,...,n . \tag{10}$$

Таким образом, для равновесия механической системы, подчиненной голономным стационарным идеальным двусторонним связям, в момент, когда скорости всех точек системы равны нулю, необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы были равны нулю.

Если в данный момент времени скорости точек системы не равны нулю, то эти скорости остаются неизменными, до тех пор, пока в последующие моменты времени выполняются условия (10).

**Пример 4.** Определить момент $M$ пары сил, который необходимо приложить к барабану 2 радиуса $r$=20 см для равномерного подъема груза 1 весом 200 Н [2].

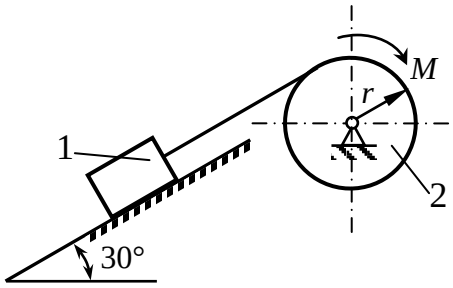


Рис.2.

При отсутствии трения на наклонной поверхности получаем систему с идеальными связями (рис.2). Сообщим системе возможное перемещение, мысленно повернув барабан 2 на угол $\delta\varphi$ в сторону действия момента $M$. При этом груз 1 получит перемещение $\delta s$ вдоль наклонной поверхности, равное $\delta s = r\delta\varphi$. Кроме пары сил, приложенной к барабану, активной силой выступает вес груза $P$. Так как движение равномерное, можно перейти к скоростям и представить

$$\delta s = t\delta v, \quad \delta\varphi = t\delta\omega .$$

Принцип Лагранжа позволяет записать равенство

$$(-P\sin\alpha)\delta v + M\delta\omega = 0 .$$

Здесь α – угол наклона поверхности, по которой скользит груз 1. Так как $\delta v = r\delta\omega$, то далее получим

$$(-rP\sin\alpha + M)\delta\omega = 0 .$$

Последнее равенство должно выполняться для любой вариации угловой скорости $\delta\omega$. Следовательно,

$$-rP\sin\alpha + M = 0$$

$$M = rP\sin\alpha = 0{,}20 \cdot 200 \cdot 0{,}5 = 20 \text{ Нм}.$$

В рассмотренном примере в силу равенства $\delta s = r\delta\varphi$ система имеет одну степень свободы. Если принять $q_1 = \varphi$, то единственная обобщенная сила выражается как $Q_1 = M - rP\sin\alpha$. Тогда искомый момент пары сил определятся из условия $Q_1 = 0$.

## 2. Общее уравнение динамики

Используем принцип возможных перемещений вместе с известным методом кинетостатики – принципом Даламбера [1,3]. Для системы, удовлетворяющей условиям принципа возможных перемещений, такой подход приводит к уравнению

$$\sum_{k=1}^{N} (\boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{\Phi}_k)\delta\boldsymbol{r}_k = 0 . \tag{11}$$

Формула (11) содержит выражение для элементарной возможной работы с учетом сил инерции

$$\boldsymbol{\Phi}_k = -m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_k, \quad k = 1,\ldots,n. \tag{12}$$

Уравнение (11) называют *общим уравнением динамики* для системы с идеальными связями или объединенным принципом Даламбера-Лагранжа. Выполнив для формулы (11) преобразования с учетом (5) и (6), получим

$$\sum_{i=1}^{n}(Q_i + Q_i^{\Phi})\delta q_i = 0. \qquad (13)$$

Как и ранее, обобщенные силы в уравнениях (13) определяются равенствами

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}, \quad i = 1,...,n.$$

Наличие в формуле (11) сил инерции приводит к появлению в формуле (13) *обобщенных сил инерции*

$$Q_i^{\Phi} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{\Phi}_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}, \quad i = 1,...,n. \qquad (14)$$

Как уже отмечалось, вариации обобщенных координат $\delta q_i$ есть величины независимые. Выполнение условия (13) возможно тогда и только тогда, когда

$$Q_i + Q_i^{\Phi} = 0, \quad i = 1,...,n. \qquad (15)$$

Условия (15) можно толковать как выражение принципа Даламбера в терминах обобщенных сил.

**Пример 5.** Грузы 1 и 2, массы которых $m_2=2m_1$, прикреплены к тросу, переброшенному через блок радиуса $r$. Пренебрегая массой блока, определить ускорение грузов. [2]

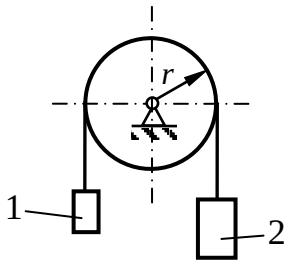

Рис.3.

Система на рис.3 имеет одну степень свободы. Выберем за обобщенную координату $q$ угол поворота барабана $\varphi$. Тогда можно выразить перемещение грузов как $s=r\varphi$. Указанное перемещение груз 1 совершает с ускорением $a$ вверх. Груз 2 при этом опускается на $s$ вниз с таким же ускорением. На основании (13) получим

$$(-m_1 g - m_1 a + m_2 g - m_2 a) r\delta\varphi = 0$$

при произвольной вариации угла поворота $\delta\varphi$. Тогда

$$-m_1 g - m_1 a + m_2 g - m_2 a = 0$$

$$a = g \cdot \frac{(m_2 : m_1) - 1}{(m_2 : m_1) + 1} = 9{,}81 \cdot \frac{2-1}{2+1} = 3{,}27 \text{ м/с}^2.$$

## 3. Уравнения Лагранжа второго рода

Как показано в [1,3], для механической системы с голономными идеальными двусторонними связями общее уравнение динамики можно привести к виду

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i\right)\delta q_i = 0. \qquad (16)$$

В формуле (16) через $T$ обозначена кинетическая энергия системы, представленная как функция обобщенных координат и обобщенных скоростей. Таким образом, уравнение (16) есть общее уравнение динамики в обобщенных координатах.

В силу независимости вариаций обобщенных координат $\delta q_i$ из уравнения (16) следует система уравнений

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i = 0, \quad i = 1,...,n. \tag{17}$$

Формулы (17) называют *уравнениями Лагранжа второго рода*. Они позволяют составить систему уравнений движения механической системы в обобщенных координатах. Каждое из уравнений (17) будет обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка относительно функций $q_i(t)$.

Рассмотрим важный частный случай *консервативной механической системы*, когда все силы, действующие на систему, являются потенциальными. Тогда можно ввести силовую функцию $U=U(q_1,\ldots,q_n)$ и выразить обобщенные силы в виде

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad i = 1,...,n. \tag{18}$$

Используем (18) в уравнениях Лагранжа (16).
Так как

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \equiv 0, \quad i = 1,...,n,$$

то

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial (T+U)}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1,...,n.$$

Формулы (17) теперь можно преобразовать к виду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T+U)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T+U)}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1,...,n.$$

Введем в рассмотрение *функцию Лагранжа*

$$L=T+U. \tag{19}$$

Тогда уравнения Лагранжа (17) принимают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1,...,n. \tag{20}$$

Величину, определяемую выражением (19) называют также *кинетическим потенциалом* [2]. Заметим, что функцию Лагранжа можно представить в виде $L=T-\Pi$, где $\Pi$ – потенциальная энергия системы.

**Пример 6.** Материальная точка $M$ массой $m$=1 кг поднимается вертикально. Определить скорость $v$ подъема в момент времени, когда кинетический потенциал точки равен нулю и она находится на высоте $h$=6 м, если при $h$=0 потенциальная энергия $\Pi_0$=0. [2]

Для нашего случая кинетический потенциал можно представить в виде

$$L = m\frac{v^2}{2} - mgh = m\left(\frac{v^2}{2} - gh\right).$$

Тогда по условию задачи

$$\frac{v^2}{2} - 6g = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{12g} \approx 10{,}8 \text{ м/с}.$$

**Пример 7.** Кинетический потенциал системы, выраженный через ее обобщенную координату $y$ и обобщенную скорость $\dot{y}$, равен $L = \dot{y}^2 + 2y$. Определить ускорение $\ddot{y}$. [2]

Используем уравнения Лагранжа второго рода (20). Приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}(2\dot{y}) - 2 = 0$$

Далее

$$2\ddot{y} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = 1.$$

**Пример 8.** Кинетический потенциал механической системы определяется выражением $L = 14\dot{\varphi}^2 + 2\varphi$, где $\varphi$ – обобщенная координата, рад. Вычислить обобщенную скорость $\dot{\varphi}$ через 2 с после начала движения, если при $t$=0 $\dot{\varphi} = 2$ рад/с. [2]

Используем уравнения Лагранжа второго рода (20). Приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}(28\dot{\varphi}) - 2 = 0.$$

Далее

$$\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{1}{14} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}(t) - \dot{\varphi}(0) = \frac{t}{14}\Big|_0^t \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}(t) = \frac{t}{14} + 2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\varphi}(2) = 15/7 \approx 2{,}14 \text{ рад/с}.$$

**Пример 9.** Кинетический потенциал механической системы определяется выражением $L = 16\dot{x}^2 + 20x$. Определить значение обобщенной координаты $x$ в момент времени $t$=3 с, если в начале движения $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 2$ м/с. [2]

Используем уравнения Лагранжа второго рода (20). Приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}(32\dot{x}) - 20 = 0.$$

Далее получаем

$$\ddot{x} = 5/8.$$

То есть данное движение механической системы происходит с постоянным ускорением $a$=0,625 м/с$^2$. Тогда

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t + \frac{at^2}{2}.$$

Окончательно получаем

$$x(3) = 0 + 2 \cdot 3 + \frac{0{,}625 \cdot 9}{2} = 8{,}8125 \approx 8{,}81 \text{ м}.$$

**Пример 10**. Механическая система представлена схемой на рис 4. Масса тел $m_1$=$m_2$=6 кг. Определить ускорение тела 1, если коэффициент трения скольжения между горизонтальной поверхностью и телом 1 равен $f$=0,2. [2]

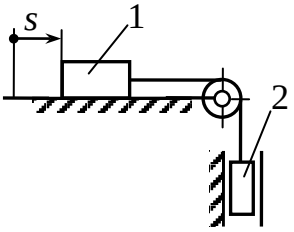

Рис.4.

Данная механическая система имеет одну степень свободы. Выберем в качестве обобщенной координаты расстояние $s$.

Так как при движении на тело 1 действует сила трения, то система не является консервативной. Используем уравнение Лагранжа второго рода в форме (17). Кинетическая энергия системы тел 1,2 будет представлена в виде

$$T = \frac{(m_1 + m_2)}{2}\dot{s}^2. \qquad (21)$$

Рассмотрим выражение для элементарной работы $\delta A$ системы на возможном перемещении $\delta s$. С учетом направления перемещения и направлений сил, действующих на систему, можно утверждать, что в выражение для элементарной работы войдут только слагаемые за счет силы трения, действующей на тело 1, и силы тяжести, действующей на тело 2. Действительно,

$$\delta A = (-m_1 g f)\delta s + (m_2 g)\delta s = (-m_1 g f + m_2 g)\delta s.$$

Последнее равенство позволяет определить обобщенную силу

$$Q = (-m_1 f + m_2)g. \qquad (22)$$

Используя выражения (21),(22) в уравнении (17), получим

$$\frac{d}{dt}\left((m_1 + m_2)\dot{s}\right) - (-m_1 f + m_2)g = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{s} = \frac{-m_1 f + m_2}{m_1 + m_2}g.$$

Ускорения тел 1,2 равны $a_1 = a_2 = \ddot{s}$. С учетом условия $m_1$=$m_2$ имеем

$$a_1 = \frac{1-f}{2}g = \frac{1-0{,}2}{2} \cdot 9{,}81 = 3{,}92 \text{ м/с}^2.$$

## 4. Канонические уравнения

Наряду с обобщенными координатами и обобщенными скоростями в аналитической механике используют *обобщенные импульсы*

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1,...,n. \qquad (21)$$

Далее мы будем обсуждать консервативные системы, для которых

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1,...,n. \tag{22}$$

Обобщенные импульсы входят в выражение для *функции Гамильтона*

$$H = -L + \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i . \tag{23}$$

Заметим, что для консервативной системы формула (23) выражает полную механическую энергию, представленную функцией обобщенных координат и импульсов.

Функцию Гамильтона используют для вывода *канонических уравнений движения*. Канонические уравнения представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно обобщенных координат и обобщенных импульсов. Получить такую систему можно на основе следующего теоретического результата [1,3]

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1,...,n. \tag{24}$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики: Учебное пособие для ВО: в двух томах / Н.В.Бутенин, Я.Л.Лунц, Д.Р.Меркин. – СПб.: Издательство «Лань», 2020.
2. Кепе О.Э. Сборник коротких задач по теоретической механике: Учебное пособие / О.Э.Кепе, О.П.Грапис, А.Я.Виба. – СПб.: Издательство «Лань», 2020.
3. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник. – СПб.: Издательство «Лань», 2011.